ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 114–127

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.9

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

Т. А. Божанова

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ, 49050. E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net

Розглядається гідродинамічна модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що транспортний потік на кожному ребрі мережі є об'єктом керування, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Виділено топологію на відповідному функціональному просторі, відносно якої множина допустимих розв'язків такої задачі є секвенційно компактною, та доведено існування ефективних розв'язків розглянутої задачі векторної оптимізації.

Ключові слова: гідродинамічна модель, транспортний потік на мережі, векторна оптимізація на мережі.

1. Вступ

У статті основним об'єктом дослідження виступає макроскопічна модель транспортного потоку на мережі, що складається зі скінченної сукупності доріг, які з'єднані деякими вузлами. На кожній окремо взятій дорозі припускається, що рух транспортних засобів підкоряється так званому гідродинамічному закону збереження, який приводить до розгляду нелінійної задачі Коші для рівняння у частинних похідних першого порядку. Дослідженню та аналізу таких задач присвячена досить обширна література (див. [1–6, 10, 11, 14, 15]).

Вважається, що на кожному ребрі мережі транспортний потік є керованим процесом. При цьому якість керування транспортним потоком на мережі визначається нескалярним відображенням у простір $L^2(\Omega_T)$, який упорядкований за конусом Λ додатних елементів. Доведено, що множина допустимих розв'язків такої задачі є секвенціально компактною відносно обраної топології. Далі доводиться існування ефективних розв'язків поставленої задачі векторної оптимізації на мережі.

2. Основні поняття та позначення

У цьому параграфі нагадаємо деякі відомі факти щодо функцій з обмеженою повною варіацією, векторнозначних відображень та частково впорядкованих нормованих просторів.

2.1. Функції з обмеженою повною варіацією

Нехай $J = (a, b)$ заданий інтервал в R. Розглянемо функцію $f : J \to R$ таку, що $f \in L^1(J)$. Тоді повною варіацією функції f називають

$$Tot.\, V_j(f) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : m \in N, a < x_0 < x_1 < \cdots < x_m < b \right\},$$

де $x_j \in J,\ j \in \{0, \ldots, m\}$.

Означення 2.1. Будемо казати, що функція $f \in L^1(J)$ є функцією з обмеженою повною варіацією на J, якщо існує константа K така, що $Tot._J\, f \leq K$. Позначимо через $BV(J)$ множину всіх дійсних функцій $f \in L^1(J)$ з обмеженою повною варіацією на J.

Є еквівалентними такі твердження (див. [9]):
(i): $f \in BV(\Omega)$;
(ii): $f \in L^1(J)$ та $|Df|\ (J) := \sup \left\{ \int_J f\varphi' dx\ :\ \varphi \in C_0^1(J), |\varphi| \leq 1 \right\} < +\infty$;
(iii): існує послідовність гладких функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(R)$ таких, що $f_k \to f$ у $L^1(J)$ і $\limsup_{k\to\infty} \int_J |f_k'|\, dx\ < +\infty$, де узагальнена похідна Df — це міра Радона, і $|Df|\ (J)$ збігається з повною варіацією функції f на J. Більше того, для функції $f \in BV(J)$ існують правосторонні та лівосторонні границі:

$$f(x^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s)ds, \quad f(x^-) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(s)ds$$

для $\forall\ x \in [a, b)$ та $\forall\ x \in (a, b]$, відповідно. І при цьому, $f(x^+) = f(x^-)$, якщо $|Df|(\{x\}) = 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. *а) Простір $BV(J)$ є простором Банаха відносно норми*

$$\|f\|_{BV(J)} = \|f\|_{L^1(J)} + |Df|\ (J);$$

б) відображення $f \to |Df|\ (J)$ є напівнеперервним знизу відносно $L^1(J)$-збіжності, тобто, якщо $f_k \to f$ у $L^1(J)$, то $|Df|\ (J) \leq \liminf_{k\to\infty} |Df_k|\ (J)$;
в) якщо $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset BV(J)$ $\sup_{k\in N} \|f_k\|_{BV(J)} < +\infty$, то існує підпослідовність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка сильно збігається до деякої функції $f \in BV(J)$.

Послідовність функцій $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset BV(J)$ називається слабко збіжною в $BV(J)$ (позначають $f_k \rightharpoonup f$), якщо

$$f_k \to f \quad \text{у просторі} \quad L^1(J) \quad \text{і} \quad \sup_{k\in N} |Df_k|\ (J) < +\infty.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $f_k \rightharpoonup f$ у $BV(J)$, $f \in BV(J)$ і $Df_k \rightharpoonup Df$ як міри Радона.

2.2. Поняття транспортної мережі

Нехай Θ — це відкрита випукла підмножина простору R^2 і $\mathfrak{F}$ — плоский граф на R^2.

Означення 2.2. Будемо казати, що множина Ω є мережею доріг, якщо її можна подати у вигляді пари $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де

(а): $\mathcal{I}$ — це скінченна сукупність ребер, котрі відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i]$ в $R,\ i = 1, \ldots, N$;

(б): $\mathcal{J}$ — скінченна кількість вершин, які відповідають вузлам даної мережі.

Кожна вершина J є об'єднанням двох непорожніх підмножин $Inc\,(J)$ та $Out\,(J)$ таких, що:

(i) кожна вершина $J \in \mathcal{I}$ є внутрішньою точкою Ω;

(ii) для $\forall J \neq J' \in \mathcal{J}$ та $Inc\,(J) \bigcap Inc\,(J') = \emptyset$ маємо: $Out\,(J) \bigcap Out(J') = \emptyset$;

(iii) якщо $i \notin \cup_{J \subset \mathcal{J}} Inc\,(J)$, тоді b_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вихідна дорога з мережі), і якщо $i \notin \cup_{J \subset \mathcal{J}} Out(J)$, тоді a_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вхідна в мережу дорога). Крім того, ці два випадки взаємно виключні.

2.3. Деякі положення про частково впорядкований простір $L^2(\Omega)$

Нехай Ω — мережа. Пов'яжемо з цією множиною дійсний простір $L^2(\Omega)$. Надалі, приймаючи позначення $y \in L^2(\Omega)$, вважаємо, що $y = (y_1, \ldots, y_N)$ та $y_k \in L^2(I_k)$ для $k = 1, \ldots, N$. Будемо вважати, що $L^2(\Omega)$, як топологічний простір, наділений слабкою топологією. Для підмножини $S \subset L^2(\Omega)$ позначимо через $int_\omega S$ та $cl_\omega S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Також припустимо, що $L^2(\Omega)$ є частково впорядкованим за конусом додатних елементів Λ, який визначається як:

$$\Lambda = \left\{ f \in L^2(\Omega);\ \ f(x) \geq 0 \quad \text{майже скрізь на } \ \Omega \right\}. \tag{2.1}$$

Тоді для елементів $y, z \in L^2(\Omega)$ будемо записувати $y \leq_\Lambda z$ усякий раз, коли $z \in y + \Lambda$, і $y <_\Lambda z$, якщо $z - y \in \Lambda \backslash \{0\}$. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є не зростаючою та використовувати позначення $y_k \downarrow$ усякий раз, коли для всіх $k \in N$ маємо: $y_{k+1} \leq_\Lambda y_k$. Також будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ є обмеженою знизу, якщо існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y^* \leq_\Lambda y_k$ для $\forall\ k \in N$.

Для того, щоб означити "оптимальні" елементи для підмножини S частково упорядкованого простору $L^2(\Omega)$, скористаємося таким поняттям:

Означення 2.3. [12] Елемент $y^* \in S \subset L^2(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини S, якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*,\ y \neq y^*$, тобто

$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S. Введемо два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^2(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють такі умови:

$$1)\ -\infty_\Lambda \leq y \leq\ +\infty_\Lambda,\ \forall\ y \in L^2(\Omega); \quad 2)\ +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\| -\infty_\Lambda \|_{L^2(\Omega)} = +\infty \ \text{ i } \ y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty, \ \forall\, y \in L^2(\Omega), \ \forall\, \lambda \in R_+.$$

Означення 2.4. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^2(\Omega)$ відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, ω)-супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\omega S$ у випадку, коли ця множина не є порожньою, і E дорівнює $+\infty_\Lambda$ інакше.

Надалі, $(\Lambda,\ \omega)$-супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\,\Lambda,\,\omega} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\,\Lambda,\,\omega} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\omega S), & Max_\Lambda(cl_\omega S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\omega S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ не порожня підмножина банахового простору X та $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ — деяке відображення. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \to Y^*$ на весь простір X, де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \tag{2.2}$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \to Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^2(\Omega)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 2.5. Підмножину $A \in L^2(\Omega)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \to L^2(\Omega)$$

відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ і позначати $Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\, I(x)$, якщо A є (Λ, ω)-супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^2(\Omega)$, тобто,

$$Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\, I(x) = Sup^{\Lambda,\,\omega} \left\{ I(x) :\ \forall\, x \in X_\partial \right\}.$$

Зауваження 2.1. Тепер зрозуміло, що якщо $a \in Sup^{\,\Lambda,\,\omega}_{x \in X_\partial}\, I(x)$, то

$$cl_\omega \left\{ I(x) : \forall\, x \in X_\partial \right\} \cap (a + \Lambda) = \{a\}$$

за умови, що $Max_\Lambda [cl_\omega \left\{ I(x) : \forall\, x \in X_\partial \right\}] \neq \emptyset$.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^2(\Omega)$. Позначимо через $L^\omega \{y_k\}$ множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$, тобто $y \in L^\omega \{y_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^2(\Omega)$ при $i \to \infty$. Якщо ця множина не є обмеженою зверху, тобто $Sup^{\,\Lambda,\,\omega} L^\omega \{y_k\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\omega \{y_k\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_\partial$. Тоді для довільного відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ введемо до розгляду такі множини:

$$L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in\, \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\omega\left\{\hat{I}(x_k)\right\}, \tag{2.3}$$

$$L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) := L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x), \tag{2.4}$$

де $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ таких, що $x_k \to x_0$ відносно σ–топології простору X.

Означення 2.6. Будемо казати, шо підмножина $A \subset L^2(\Omega) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є Λ–нижньою секвенціальною границею відображення $I : X_\partial \to L^2(\Omega)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології добутку $\sigma \times \omega$ простору $X \times L^2(\Omega)$ і використовувати позначення $A = \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x)$, якщо

$$\limsup^{\Lambda,\,\omega}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x) := \begin{cases} L^{\sigma\times\omega}_{max}(I,\, x_0), & L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) \neq \emptyset, \\ Sup^{\;\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0), & L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) = \emptyset. \end{cases} \tag{2.5}$$

Зауваження 2.2. У скалярному випадку ($I : X_\partial \to R$) множини

$$Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) \text{ та } Sup^{\;\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0)$$

містять тільки один елемент. Тому, якщо $L^{\sigma\times\omega}_{max}(I, x_0) \neq \emptyset$, то маємо:

$$\begin{aligned} L^{\sigma\times\omega}_{\max}(I, x_0) &= L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) = \\ &= Sup^{\;\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\omega}_{x\in X_\partial} I(x) = Sup^{\;\Lambda,\,\omega} L^{\sigma\times\omega}(I, x_0). \end{aligned}$$

Отже, у цьому випадку правило (2.5) дає класичне означення нижньої границі.

3. Постановка задачі

Нехай $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — транспортна мережа, яка налічує N доріг. Для $i \in \{1, \ldots, N\}$ дорога I_i відповідає відрізку $[a_i, b_i]$. Позначимо через $\rho_i = \rho_i(t, x)$ щільність машин на дорозі I_i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$; при цьому максимально можливу щільність на дорозі, котра відповідає появі затору на даній ділянці мережі, позначимо як $\rho_{max,i}$. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графу $\mathfrak{F}$, обмеженого областю Ω, а вузли, які з'єднують дороги, — вершинам цього графу. Припускається, що на кожному ребрі мережі динаміка руху описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку:

$$\partial_t \rho_i(t,\, x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = u_i, \quad (t, x) \in (0, T) \times (a_i, b_i) \equiv \Omega_{i,T}, \tag{3.1}$$

з початковими умовами:

$$\rho_i(0,\, x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall\, x \in (a_i,\, b_i), \tag{3.2}$$

де $f(\rho) = \rho v$ — транспортний потік (кількість машин, що проїжджають за одиницю часу), через $v(\rho)$ позначено швидкість машин, а u_i — функції керування. Слід зауважити, що $v(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ. При цьому, f_i мають задовольняти такі умови (див. [8, 11]):

$$\begin{cases} f_i \text{ неперервно диференційовані на } [0,\ \rho_{max,\,i}], \\ f_i(0) = f_i(\rho_{max,\,i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго угнуті функції}, \\ \exists\ \sigma \in (0, \rho_{max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0,\ \forall\ \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \tag{3.3}$$

Як витікає з наведених вище умов, транспортний потік є додатним для $0 < \rho_i < \rho_{max,\,i}$. Тут σ_i — оптимальна щільність, при якій транспортний потік досягає свого максимального значення.

Вважається, що у кожному вузлі J з n вхідними ребрами $I_1, \ldots, I_n$ та m вихідними ребрами $I_{n+1}, \ldots, I_{n+m}$ виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(t, b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t, a_i)). \tag{3.4}$$

Проте виконання цієї умови не є достатнім для визначення єдиного розв'язку задачі Коші (3.1)–(3.3)на мережі. Тому, залучаючи підхід Coclite, Garavelo та Piccoli (див. [8]), припустимо, що у кожному вузлі J мережі задана так звана матриця розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ така, що

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)],\ \ j \in \{n+1, \ldots, n+m\}\,,\ \ i \in \{1, \ldots, n\}\,, \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J),\ \ \forall\ i \neq i',\ 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \displaystyle\sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1, \ldots, n\}\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

та виконується ентропійна умова Кружкова (див. [13])на мережі. За цих припущень можна гарантувати існування та єдинність слабкого розв'язку задачі Коші в класі функцій з обмеженою повною варіацією, де під розв'язком цієї задачі будемо розуміти таке:

Означення 3.1. Нехай J — вузол з n вхідними дорогами $I_1, \ldots, I_n$ з кінцем у вузлі b_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \ldots, I_{n+m}$ з кінцем a_i ($i \in \{n+1, \ldots, n+m\}$). Нехай задано функції $\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, які задають початкову щільність на мережі. Будемо казати, що сукупність функцій

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N) : \prod_{i=1}^{N} ([0, T] \times I_i) \to R^N,$$

де

$$\rho_i \in L^\infty((0, T); BV(I_i)), i \in \{1, \ldots, N\}\,,$$

є допустимим розв'язком задачі (3.1)–(3.6), якщо:

(а): $\rho_i : [0,\, T] \times I_i \to R$ є слабким ентропійним розв'язком задачі (3.1)–(3.2) на I_i, тобто

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i)\partial_x \varphi) dxdt = \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} u_i\, dxdt, \tag{3.7}$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k|\partial_t \tilde{\varphi} + \mathrm{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k))\partial_x \tilde{\varphi})\, dxdt \geq 0 \tag{3.8}$$

для довільної гладкої функції $\varphi : [0, T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на множині $(0, T) \times (a_i,\, b_i)$ для $k \in R$ та для довільної гладкої додатної функції $\tilde{\varphi} : [0, T] \times I_i \to R$ з компактним носієм на $(0, T) \times (a_i,\, b_i)$;

(б): $\rho_i(0,\, \cdot) = \bar{\rho}_i$ на I_i для $\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$;

(в): $f_j(\rho_j(\cdot, \alpha_j+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ для $\forall J \in \mathcal{J}, \forall j = n+1, \ldots, n+m$;

(г): $L(J, u^k, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ досягає максимального значення на парі (u^k, ρ) при обмеженнях (а)-(в).

Має місце наступна теорема, доведення якої можна знайти в [8]. При цьому під мережею доріг Ω будемо розуміти таке: $\Omega = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$.

Теорема 3.1. *Зафіксуємо мережу доріг Ω, яка складається зі скінченної сукупності ребер та вузлів. Нехай $C > 0$, $T > 0$, тоді існує допустимий ентропійний розв'язок задачі Коші (3.1)-(3.6), визначений на $(0, T)$ для будь-яких початкових умов $\bar{\rho} \in cl\, \{\rho :\ TV(\rho) \leq 0\}$, де через cl позначено замикання в L^1_{loc}, такий, що*

$$\|\rho_i(t)\|_{BV(I_i)} \leq C_1 \left(\|\bar{\rho}\|_{L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)} + \|u\|_{L^1(0,T;BV(\Omega))} \right) e^{C_2 t},\ \forall t \in (0, T), \tag{3.9}$$

при деяких $C_1 > 0$ та $C_2 > 0$ (див. [16]).

Пов'яжемо із задачею (3.1)–(3.6) наступну задачу векторної оптимізації:

$$\begin{cases} \text{знайти } u^* \in U_{ad} \text{ такі, що} \\ F\left(\rho(u^*), u^*\right) \in Sup^{\Lambda,\omega}_{u \in U_{ad}} F(\rho, u), \end{cases} \tag{3.10}$$

де $F(\rho, u) = \sum_{i=1}^n |\rho_i(t, x) - \rho_{i,d}(x)|$, Λ — упорядкований конус додатних елементів у просторі $X = L^2(\Omega_{1,T}) \times \ldots \times L^2(\Omega_{N,T})$, де ω — слабка топологія простору X, $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — функції керування транспортним потоком, які задані на ребрах мережі, та $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$ — відповідний ентропійний розв'язок задачі Коші (3.1)–(3.6).

Припускається, що функції керування $u_i, i = \{1, \ldots, N\}$ належать множині $U = \prod_{i=1}^N L^\infty(\Omega_{i,T})$, і виконуються такі умови:

(A1): $f = (f_1, \ldots, f_N) : R \to R^N$ — локально ліпшицева функція;

(A2): множиною допустимих керувань U_{ad} виступає обмежена підмножина в U, яка є замкненою в $L^1(\Omega_{1,T}) \times \ldots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

За таку множину допустимих керувань візьмемо множину функцій, які є обмеженими майже скрізь та мають обмежену повну варіацію, тобто

$$\tilde{U}_{ad} = \left\{ u \in \prod_{i=1}^{N} \left(L^{\infty}(\Omega_{i,T}) \cap BV(\Omega_{i,T}) \right), \ \|u_i\|_{L^{\infty}(\Omega_{i,T})} \leq c_i, \ \|u_i\|_{BV(\Omega_{i,T}) \leq d_i)} \right\}. \tag{3.11}$$

Покажемо, що будь-яка послідовність $\left\{u^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \tilde{U}_{ad}$ містить підпослідовність, яка збігається сильно до деякого $u^* \in \tilde{U}_{ad}$ в $L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

Для зручності введемо такі позначення:

$$v = (v_1, \dots, v_N), \ \ \Omega_T = \Omega_{1,T} \times \dots \times \Omega_{N,T},$$

$$L^1(\Omega_T) = L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T}),$$

$$\|v\|_{L^1(\Omega_T)} = \sum_{i=1}^{N} \|v_i\|_{L^1(\Omega_{i,T})}.$$

Розглянемо послідовність $\left\{v^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(\Omega_T) \cup BV(\Omega_T)$ з наступними властивостями: $\|v_i^k\|_{L^{\infty}(\Omega_{i,T})} \leq c_i$, $\|v_i^k\|_{BV(\Omega_{i,T})} \leq d_i$ для $\forall i = \{1, \dots, N\}$. Тоді $\left\{v^k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega_T)$, оскільки

$$\|v^k\|_{L^1(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left|v^k\right| dx\, dt \leq \sup_{x \in \Omega_T} \left|v^k\right| \int_{\Omega_T} dx\, dt = \|v^k\|_{L^{\infty}(\Omega_T)} \mu(\Omega_T) < \infty.$$

За критерієм компактності BV-функцій, маємо: $v^k \to v^*$ в $L^1(\Omega_T)$, тобто

$$\lim_{k \to \infty} \|v^k - v^*\|_{L^1(\Omega_T)} = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_T} \left|v^k - v^*\right| dxdt = 0.$$

З іншого боку, $\left\{v^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ утворюють обмежену множину в $L^{\infty}(\Omega_T)$. Отже, за теоремою Банаха – Алаоглу, знайдеться елемент $v^0 \in L^{\infty}(\Omega_T)$ такий, що $v^k \overset{*}{\rightharpoonup} v^0$. Це означає, що для $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_T)$

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_T} v^k \varphi dxdt = \int_{\Omega_T} v^0 \varphi dxdt,$$

тобто

$$\int_{\Omega_T} \varphi (v^k - v^0) dxdt \to 0, \ \ k \to \infty. \tag{3.12}$$

При цьому

$$\|v^0\|_{L^{\infty}(\Omega_T)} \leq \underline{\lim}_{k \to \infty} \|v^k\|_{L^{\infty}(\Omega_T)} \leq c_i.$$

Покажемо, що $v^k = v^0$. Маємо:

$$0 \leq \left| \int_{\Omega_T} (v^0 - v^*) \varphi\, dx \right| \leq \left| \int_{\Omega_T} (v^0 - v^k) \varphi\, dx \right| + \left| \int_{\Omega_T} (v^k - v^*) \varphi\, dx \right|.$$

Залучаючи (3.12) та той факт, що

$$\left|\int_{\Omega_T}(v^k-v^*)\varphi\,dx\right|\le\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega_T)}\int_{\Omega_T}\left|v^k-v^*\right|dxdt\to 0,$$

отримуємо:

$$\int_{\Omega_T}(v^0-v^*)\varphi\,dxdt=0\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega_T).$$

Отже, $v^0 = v^*$ майже скрізь на Ω_T, тобто $v^* \in L^\infty(\Omega_T)$. Покажемо, що $v^* \in BV(\Omega_T)$. Оскільки $\left\{v^k\right\}_{k=1}^\infty \in BV(\Omega_T)$ і $\|v^k\| \le d_i$, то за критерієм компактності (див. теорему 1) існує елемент $\hat{v} \in BV(\Omega_T)$ такий, що $v^k \to \hat{v}$ сильно в $L^1(\Omega_T)$ і $\|\hat{v}\|_{BV(\Omega_T)} \le d_i$. Звідси отримуємо, що $v^* = \hat{v} \Rightarrow v^* \in BV(\Omega_T)$ і

$$\|v^*\|_{BV(\Omega_T)}\le d_i.$$

Означення 3.2. Будемо казати , що задача (3.10) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \dots f_N)$ з властивостями (3.3) існує пара

$$(u,\rho)\in\tilde{U}_{ad}\times L^\infty((0,T);BV(\Omega)),$$

де $\rho = \rho(u)$ — відповідний розв'язок задачі (3.1)–(3.6) і такий, що $F(u, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega_T)$.

Позначемо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (3.1)–(3.10). Очевидно, що $\Xi \subset \tilde{U}_{ad} \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$.

Означення 3.3. Допустиму пару $\left(u^{eff}, \rho^{eff}\right) \in \Xi$ будемо називати (Λ, ω)-ефективним розв'язком задачі (3.1)-(3.10), якщо пара $\left(u^{eff}, \rho^{eff}\right)$ реалізує (Λ, ω)-супремум відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$, тобто

$$F\left(u^{eff},\rho^{eff}\right)\in Sup^{\Lambda,\omega}_{(u,\rho)\in\Xi}F\left(u,\rho\right)=Sup^{\Lambda,\omega}\left\{F(u,\rho)\ :\ \forall(u,\rho)\in\Xi\right\}.$$

Позначимо через $Eff(\Xi; F; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω)-ефективних розв'язків задачі (3.1-3.10), тобто

$$Eff(\Xi;F;\Lambda)=\left\{\left(u^{eff},\rho^{eff}\right)\in\Xi\ :\ F\left(u^{eff},\rho^{eff}\right)\in Sup^{\Lambda,\omega}_{(u,\rho)\in\Xi}F\left(u,\rho\right)\right\}.$$

Тепер дамо наступний результат стосовно топологічних властивостей множини допустимих пар Ξ задачі (3.10). Нехай τ — топологія на

$$Y=\tilde{U}_{ad}\times L^2\left(0,T;BV(\Omega)\right),$$

яка задана як добуток сильної збіжності в $L^1(\Omega_T)$ та слабкої топології в просторі $L^2(0, T; BV(\Omega))$. Тоді має місце теорема:

Теорема 3.2. *Нехай $\left\{(u^k, \rho^k) \in \Xi\right\}_{k=1}^\infty$ довільна послідовність допустимих пар у задачі (3.1–3.10). Тоді знайдеться пара $(u^*, \rho^*) \in Y$ і підпослідовність даної послідовності (для якої збережемо попередні позначення) такі, що*

$$(u^*,\rho^*)\in\Xi,\qquad(u^k,\rho^k)\xrightarrow{\tau}(u^*,\rho^*),$$

тобто множина Ξ є секвенційно компактною відносно τ-збіжності.

Доведення. Нехай $\left\{(u^k,\rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty}\subset\Sigma$ — довільна послідовність. Як випливає з (3.11) та наведеного вище аналізу, знайдеться елемент $u^*\in\tilde{U}_{ad}$ такий, що з точністю до підпослідовності маємо:

$$u^k \ \to\ u^* \quad \text{в} \quad L^1(\Omega_T),$$

$$u^k \ \overset{*}{\rightharpoonup}\ u^* \quad \text{в} \quad L^\infty(\Omega_T).$$

Далі, залучаючи апріорну оцінку (3.9) та оцінки з (3.11), отримуємо, що послідовність $\left\{\|\rho^k\|_{L^\infty}((0,T);BV(\Omega))\right\}_{k\in N}$ є рівномірно обмеженою. Отже, за теоремою Банаха – Алаоглу та властивостей BV-просторів можемо вважати, що знайдеться елемент $\rho^*\in L^\infty((0,T);BV(\Omega))$ такий, що (з точністю до підпослідовності):

$$\rho^k \ \to\ \rho^* \quad \text{в} \quad L^1(\Omega) \ \text{ майже скрізь на } (0,T)$$

та

$$\rho^k \ \overset{*}{\rightharpoonup}\ \rho^* \quad \text{в} \quad L^\infty((0,T);L^1(\Omega)).$$

Покажемо, що $(u^*,\rho^*)\in\Sigma$. Оскільки $u^*\in\tilde{U}_{ad}$, то залишається показати, що пара (u^*,ρ^*) задовольняє співвідношення (3.7), (3.8) та умови (б)–(г) з означення (3.1). Тоді, в силу теореми існування (3.1) отримаємо, що

$$\rho^*=(\rho_1^*,\dots,\rho_N^*):\Pi_{i=1}^N\left([0,T]\times I_i\right)\to R^N$$

буде єдиним ентропійним розв'язком задачі (3.1)–(3.6) в $L^\infty(0,T;BV(\Omega))$ при $u=u^*$. Розглянемо співвідношення 3.7), (3.8) та умови (б)–(г) з $u=u^k,\rho=\rho^k$ та вивчимо їх граничні властивості при $k\to\infty$. Оскільки функції потоку $f=(f_1,\dots,f_N)$ задовольняють умову (3.3), $\upsilon(\rho)$ неперервно спадна функція на $[0,\rho_{max,i}]$, $\rho^k\overset{*}{\rightharpoonup}\rho^*$ в $L^2(0,T;BV(\Omega))$ та $\rho^k(t,\cdot)\to\rho^*(t,\cdot)$ сильно в просторі $L^1(\Omega_T)$ для $\forall t\in[0,T]$, то, переходячи до границі у співвідношеннях

$$0\le\upsilon(\rho_i^k)\le\upsilon_{max,i}\quad\text{для } \forall\in\{1,\dots,N\}\,, \tag{3.13}$$

$$\int_0^T\int_{a_i}^{b_i}(\rho_i^k\partial_t\varphi+f_i(\rho_i^k)\partial_x\varphi)\,dx\,dt=u_i^k,\ \forall\varphi\in C_0^\infty((0,T)\times(a_i,b_i)),\ \forall I_i\in\mathcal{J}, \tag{3.14}$$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^T\int_{a_i}^{b_i}(|\rho_i^k-d|\partial_t\tilde{\varphi}+sgn(\rho_i^k-d)(f_i(\rho_i^k)-f_i(d))\partial_x\tilde{\varphi})\,dx\,dt\ge0,\\ \forall d\in R,\forall\tilde{\varphi}\in C_0^\infty((0,T)\times(a_i,b_i)),\tilde{\varphi}\ge0,\forall i\in\{1,\dots,N\}\,,\end{cases} \tag{3.15}$$

$$\rho_i^k=\bar{\rho}_i(\cdot)\text{ на } I_i \text{ для }\ \forall i\in\{1,\dots,N\}\,, \tag{3.16}$$

$$f_j(\rho_j^k(\cdot,a_j+))=\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i^k(\cdot,b_i-))\ \text{ для }\ \forall j=n+1,\dots,n+m, \tag{3.17}$$

при $k \to \infty$, отримаємо співвідношення (3.7), (3.8) та умови (б)–(г) з $u = u^*, \rho = \rho^*$. Тепер для довільного вузла $J \in \mathcal{J}$ доведемо, що

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i^k(\cdot, b_i-)) \text{ досягає } \max \text{ за умов (3.13)–(3.17)} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i^*(\cdot, b_i^-)) \text{ досягає максимального значення на парі } (u^*, \rho^*) \quad (3.18)$$

за умов (3.7), (3.8), (б)–(г) та для $\forall J \in \mathcal{J}$. Для цього скористаємося варіаційними властивостями Γ-граничних функціоналів (див. [7]). Оскільки функція $\tilde{L}(J, u^k, \rho) := -\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(\cdot, b_i-))$ є замкненою відносно τ-збіжності, тобто $\lim_{l\to\infty} \tilde{L}(J, u^l, \rho^(l)) = \tilde{L}(J, u, \rho)$ для довільної послідовності $\left\{(u^l, \rho^l)\right\}_{l=1}^{\infty}$, τ-збіжної до (u, ρ), то звідси випливає, що ця функція замкнена відносно $\Gamma(\tau)$-збіжності. Тому співвідношення (3.18) — це прямий результат варіаційних властивостей $\Gamma(\tau)$-границь. Таким чином, τ-гранична пара (u^*, ρ^*) є допустимою парою задачі (3.1)–(3.10). Теорема доведена. □

4. Теорема існування

Нехай $\hat{F} : [\tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T;\ BV(\Omega))] \to Y^\bullet$ — деяке розширення відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ на весь простір $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T;\ BV(\Omega))$. Тут через $Y^\bullet$ позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega_T) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 4.1. Будемо казати, що відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ є $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-півнеперервним зверху ($(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-нн. зв.) у точці $(u^0,\ \rho^0) \in \Xi$, якщо

$$F(u^0,\ \rho^0) \in \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho) \xrightarrow{\tau} (u^0,\,\rho^0)} \hat{F}(u,\ \rho)$$

Відображення F є $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-нн. зв. на множині Ξ, якщо F є $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-нн. зв. на кожній парі з Ξ.

Твердження 4.1. Припустимо, що простір керування $L^2(\Omega_T)$ частково впорядкований за конусом додатних елементів Λ. Нехай Ξ непорожня підмножина з простору $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T;\ BV(\Omega))$ і $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ — задане відображення. Якщо $(u^0,\ \rho^0) \in \Xi$ є довільним $(\Lambda,\ \omega)$-ефективним розв'язком задачі (3.1)-(3.10), то відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ є $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-нн. зв. на цій парі.

Доведення. Нехай $(u^0,\ \rho^0) \in \mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ F;\ \Lambda)$. Тоді $F(u^0,\ \rho^0) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\Xi} F(u, \rho)$. З іншого боку, $F(u^0,\ \rho^0) \in L^{\tau\times\omega}(F,\ u^0,\ \rho^0)$, тому $F(u^0,\ \rho^0) \in L^{\tau\times\omega}_{\max}(F,\ u^0,\ \rho^0)$. Звідси, згідно з означенням (2.6), маємо: $F(u^0, \rho^0) \in \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(u^0,\,\rho^0)} \hat{F}(u, \rho)$, що й доводить твердження. □

Зауважимо, що конус додатних елементів Λ у просторі $L^2(\Omega_T)$ задовольняє так звану властивість Даніеля, яка означає, що кожна зростаюча та обмежена зверху послідовність (тобто якщо $i \le j \Rightarrow y_i \le_\Lambda y_j$) слабко збігається до свого $(\Lambda,\ \omega)$-супремума.

Означення 4.2. Будемо казати, що непорожня підмножина $Y_0 \subset L^2(\Omega_T)$ з упорядкованим конусом Λ є напівобмеженою зверху, якщо кожна зростаюча послідовність $\{y_i\} \subset Y_0$ є обмеженою зверху.

Зауваження 4.1. Нехай Y_0 — напівобмежена зверху підмножина частково впорядкованого лінійного простору $< L^2(\Omega_T), \Lambda >$. Тоді для довільного елемента $z \in Y_0$ перетин $Y_0^z = (\{z\} + \Lambda) \cap Y_0$ буде обмеженим зверху, тобто існує елемент $z^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $z^* \leq_\Lambda y$ для всіх $y \in Y_0^z$. Отже, напівобмеженість зверху підмножини Y_0 означає напівобмеженість зверху її слабкого замикання $\mathrm{cl}_\omega Y_0$. З іншого боку, порівняно зі скалярним випадком для векторної оптимізаційної задачі (3.1)–(3.10) із секвенційно τ-компактною підмножиною Ξ та $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-півнеперервним зверху цільовим відображенням $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ множина образів $F(\Xi)$ може бути необмеженою зверху. Це означає, що у загальному випадку не існує елемента $y \in L^2(\Omega)$ такого, що $F(\Xi) \subset \{y^*\} - \Lambda$.

Тепер перейдемо до формулювання та доведення основного результату даної роботи.

Теорема 4.1. *Припустимо, що задача векторної оптимізації (3.1)–(3.10) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-нн. зв. відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$. Тоді задача (3.1)–(3.10) має непорожню підмножину (Λ, ω)-ефективних розв'язків.*

Доведення. Крок 1. Покажемо, що множина образів $F(\Xi)$ є напівобмеженою зверху у сенсі означення (4.2). Припустимо протилежне, а саме: нехай існує послідовність $\left\{(u^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \in \Xi$ така, що відповідна послідовність образів $\left\{y^k = F(u^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \in F(\Xi)$ є зростаючою (тобто $y_k \leq_\Lambda y_{k+1}$ для $\forall\ k \in N$) та необмеженою зверху в просторі $L^2(\Omega_T)$. Тому $\infty_\Lambda \in L^\omega \{y_k\}$, де через $L^\omega \{y_k\}$ позначено множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega_T)$. Згідно з теоремою (3.2), послідовність $\left\{(u^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \in X_\partial$ є секвенційно τ-компактною. Тому можемо вважати, що $(u^k,\ \rho^k) \xrightarrow{\tau} (u^*,\ \rho^*)$ у $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T;\ BV(\Omega_T))$, де $(u^*,\ \rho^*)$ — деяка пара з множини Ξ. Оскільки послідовність $\left\{F(u^k,\ \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ не обмежена зверху, то $\{\infty_\Lambda\} \in L^{\tau\times\omega}_{\max}(F,\ u^*,\ \rho^*)$. Тому, згідно з означенням (2.6), маємо: $\limsup^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(u^0,\,\rho^0)} F(u,\ \rho) = \{\infty_\Lambda\}$. З іншого боку, беручи до уваги $(\Lambda,\ \tau \times \omega)$-півнеперервність зверху відображення F, отримаємо: $F(u^*,\ \rho^*) \in \limsup^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\xrightarrow{\tau}(u^0,\,\rho^0)} F(u,\ \rho)$, що суперечить попередньому припущенню. Крок 1 доведено.

Крок 2. Покажемо, що множина $\mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\,\Xi} F(u,\ \rho)$ є непорожньою. Для цього покажемо, що існує принаймні одна зростаюча послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F(\Xi)$ така, що $y_k \rightharpoonup y^*$ і

$$y^* \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\,\Xi} F(u,\ \rho) = \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega} \left\{F(u,\ \rho) : \forall\ (u,\ \rho) \in \Xi\right\}.$$

Нехай y — довільний елемент множини $\mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$. Спочатку покажемо, що для довільного околу нуля ν_ω у слабкій топології простору $L^2(\Omega_T)$ існує елемент

$y^\nu \in \mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$ такий, що

$$y \leq_\Lambda y^\nu \text{ та } (\{y^\nu\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})) = \emptyset. \tag{4.1}$$

Припустимо протилежне. Нехай існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$ така, що $y_1 \in F(\Xi)$, $y_{k+1} \in (\{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y_k\}))$ $\forall\, k \in N$. Оскільки $y_{k+1} \in \{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}$, то ця послідовність є спадною. Беручи до уваги зауваження (4.1), отримуємо, що множина $\mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$ є напівобмеженою зверху. Отже, існує елемент $y^* \in L^2(\Omega_T)$ такий, що $y_k \leq_\Lambda y^*$ для всіх $k \in N$. Тому, згідно з властивістю Даніеля, ця послідовність слабко збігається до свого $(\Lambda,\, \omega)$-супремума: $y_k \rightharpoonup \tilde{y} \in L^2(\Omega_T)$. Проте це суперечить умові, що $y_{k+1} \in \mathrm{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})$ $k \in N$. Таким чином, вибір за допомогою правила (4.1) можливий для будь-якого околу ν_ω.

Нехай $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ — система слабких околів нуля у просторі $L^2(\Omega_T)$ така, що $\nu_{k+1} \subset \nu_k$ для всіх $k \in N$, і для будь-якого слабкого околу $\nu(0)$ в $L^2(\Omega_T)$ існує номер $k^* \in N$ такий, що $\nu_{k_*} \subseteq \nu(0)$. Тоді, використовуючи вибране правило (4.1), можемо побудувати послідовність $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$, де η_1 — це довільний елемент з множини $F(\Xi)$, таким чином:

$$\eta_{k-1} \leq_\Lambda \eta_k \text{ і } (\{\eta_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_k + \{\eta_k\})) = \emptyset\ \forall\, k \geq 2. \tag{4.2}$$

Тому, з огляду на властивість Даніеля,$\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$ є τ-збіжною зростаючою послідовністю. Звідси отримуємо, що існує елемент

$$\eta^* \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega} \{\eta_k \in \mathrm{cl}_\omega F(\Xi) : \forall\, k \in N\}$$

такий, що $\eta_k \rightharpoonup \eta^*$. Очевидно, що $\eta^* \in \mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$. Доведемо, що

$$\eta^* \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega} \{F(u,\, \rho) : \forall\, (u,\, \rho) \in \Xi\}.$$

Припустимо, що існує елемент $q \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega} \{F(u,\, \rho) : \forall\, (u,\, \rho) \in \Xi\}$ такий, що $\eta^* \leq_\Lambda q$. Оскільки $\eta_k \leq_\Lambda \eta^*$ для $\forall\, k \in N$, то отримуємо, що $\eta_k \leq_\Lambda q$ для $\forall\, k \in N$. Тоді умова (4.2) гарантує, що

$$(\{q\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\mathrm{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_k + \{\eta_k\})) = \emptyset\ \forall\, k \in N. \tag{4.3}$$

Отже, з умови (4.3) та з того, що $q \in \mathrm{cl}_\omega F(\Xi)$, випливає: $q \in \nu_k + \{\eta_k\}$ для $\forall\, k \in N$, тобто $\eta_k \rightharpoonup q$ у просторі $L^2(\Omega_T)$. Таким чином, $\eta^* = q$.

Крок 3. Покажемо, що множина всіх $(\Lambda,\, \omega)$-ефективних розв'язків задачі (3.1)–(3.10) не є порожньою. Нехай ξ — будь-який елемент із множини $\mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\Xi} F(u,\, \rho)$. Тоді, згідно з означенням (2.5), існує послідовність пар $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega_T)$ така, що $y_k \rightharpoonup \xi$ в $L^2(\Omega_T)$. Означимо послідовність $\left\{(u^k,\, \rho^k)\right\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ як: $(u^k,\, \rho^k) = F^{-1}(y_k)$ для всіх $k \in N$. Оскільки множина Ξ є секвенційно τ-компактною (див. теорему 3.2), то будемо вважати, що існує пара $(u^0, \rho^0) \in \Xi : (u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau}$ в Y. Тому $\xi \in L^{\tau\times\omega}(F,\, u^0,\, \rho^0)$, і отримуємо, що $L^{\tau\times\omega}(F,\, u^0,\, \rho^0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\Xi} F(u,\, \rho) \neq \emptyset$. Тоді, в силу $(\Lambda,\, \tau\times\omega)$-нн. зв. відображення F на Ξ та означення (2.6), маємо:

$$F(u^0,\, \rho^0) \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\Xi} F(u,\, \rho) = L^{\tau\times\omega}(F,\, u^0,\, \rho^0) \cap \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\Xi} F(u,\, \rho).$$

Таким чином, з одного боку, $F(u^0,\ \rho^0) \in L^{\tau\times\omega}(F,\ u^0,\ \rho^0)$, звідки випливає рівність $F(u^0,\ \rho^0) = \xi = \lim_{k\to\infty} y_k$. З іншого боку, $\xi \in \mathrm{Sup}^{\Lambda,\,\omega}_{(u,\,\rho)\in\,\Xi}\, F(u,\ \rho)$. Отже, $(u^0,\ \rho^0) \in \mathrm{Eff}_\omega(\Xi;\ F;\ \Lambda)$. Теорема повністю доведена. $\square$

Бібліографічні посилання

1. *Божанова Т. А.* Об одной задаче Коши на транспортных сетях / Т. А. Божанова// Зб. наук. праць "Питання прикладної математики і математичного моделювання". — ДНУ, 2009. — С. 51–63.
2. *Bardos C., Leroux A. Y., Nedeles J. C.* First-order quasilinear equations with boundary conditions //Communications in Partial Differential Equations — 4(1979). — p. 1017–1034.
3. *Caascone A., D'Apice C., Piccoli B., Rarita L.* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences //SIAM Journal on Mathematical Analysis — 17(2007). —№ 10 — p. 1587–1617.
4. *Caascone A., D'Apice C., Rarita L.* Circulation of car traffic in cingested urban areas //Preprint DIIMA— Universita degli Studi di Salerno (2006). — № 22 — p. 1–31.
5. *Coclite G. M., Piccoli B.* Traffic Flows on a Road Network. — SISSA, Preprint. — 2002.
6. *Coclite G. M., Garavelo M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 36(2005). — p. 1862–1886.
7. *Dal Maso G.* An Introduction to Γ–Convergence, Birkh*ä*ser, Boston, 1993.
8. *Garavello M., Piccoli B.* Traffic Flow on Networks // AIMS Series on Appl. Math. — Vol. 1 — 2006.
9. *Guisti E.* Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. // Boston: Birkh*ä*user. — 1984.
10. *Gugat M., Herty M., Klar A., Leugering G.* Optimal Control for Traffic Flow Networks //Journal of optimization theory and applications. — 126(2005). — p. 589–616.
11. *Holden H., Riserbo N. H.* A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 4(1995). — p. 999–1017.
12. *Jahn J.* Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
13. *Kruzhkov S.* First-order quasilinear equations in several independent variables // Math. USSR Sbornic. — 10(1970). — p. 217–243.
14. *Lebecque J., Khoshyaran M.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment //In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds. — 2002.
15. *Lighthill M. L., Whitham J. B.* On kinetic waves // Proceedings of Royal Society of Edinburg. — 229A (1983). — p. 217–243.
16. *Ulbrich S.* Optimal Control of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms.// Fakultät für Mathematik. Technische Universität M*ü*nchen. —2001.

Надійшла до редколегії 01.09.2010