ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2011. Вип. 3. С. 21–29

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 539.9

ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ОБЛАСТІ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Л. В. Волошко, О. М. Кісельова, В. Д. Ламзюк
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ, 49050.

Отримано алгоритм саморегуляризації системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду і крайової задачі для бігармонічного рівняння.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, крайова задача, неканонічна форма області.

1. Вступ

Для постановки і розв'язування складних задач оптимізації [7], механіки [2], теорії керування [8] необхідні ефективні обчислювальні алгоритми розв'язку крайових задач рівнянь математичної фізики. На відміну від точних (аналітичних) розв'язків для канонічних областей, отримати такий розв'язок у випадку складної форми області досить складно. Далі розглядається наближений метод розв'язування крайової задачі, який базується на інтегральному представленні певного типу і, головне, при цьому ефективно враховується складність області. Обчислювальна ефективність цього методу, який має назву методу потенціалу, ґрунтується на двох відомих обставинах. Перша з них полягає в тому, що крайова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь. Це означає, що апроксимації при чисельній реалізації методів потенціалу підлягають інтегральні оператори, а не диференціальні. А така апроксимація може бути здійснена з високою точністю при малих затратах часу на обчислення. Другий момент — зведення вихідної крайової задачі до контурних інтегральних рівнянь — приводить до скорочення на одиницю розмірності множини, на якій відшукуються невідомі.

Метод полягає в тому, що ядрами відповідних потенціалів є фундаментальні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, саме такий варіант методу потенціалу був використаний. В процесі розробки, засвоєння і поглиблення уявлень про обчислювальні можливості цього підходу виявлені його істотні переваги і помітна конкурентоспроможність порівняно з іншими наближеними методами — скінченних елементів і кінцевих різниць [2, 9].

2. Крайова задача для бігармонічного рівняння

$$\Delta\Delta w(x,y) = 0, \tag{2.1}$$

$$w|_\Gamma = \varphi, \quad \left.\frac{dw}{dn}\right|_\Gamma = \psi, \tag{2.2}$$

$w = w(x, y)$ — невідома функція; Γ — контур складної форми, який обмежує область Ω; φ, ψ — неперервні в Ω функції. На відміну від точних розв'язків для канонічних областей, використовується наближений метод розв'язування граничної задачі для такого рівняння. Останній базується на інтегральному представленні розв'язку у вигляді суми бігармонічних потенціалів, ядра яких є фундаментальними розв'язками рівняння (2.1). Отже, розв'язок задачі (2.1)–(2.2) будемо шукати у вигляді:

$$w(x, y) = \int_\Gamma \left[\mu_1(s) r^2 \ln r + \mu_2(s) \frac{\partial}{\partial\nu}(r^2 \ln r)\right] d\Gamma(s), \tag{2.3}$$

де μ_1, μ_2 — невідомі функції щільності, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$. Далі крайова задача (2.1)–(2.2) зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\int_\Gamma r^2 \ln r \mu_1(s)\, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial\nu}(r^2 \ln r)\mu_2(s)\, d\Gamma(s) = \varphi(x, y),$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \ln r)\mu_1(s)\, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial^2}{\partial n \partial\nu}(r^2 \ln r)\mu_2(s)\, d\Gamma(s) = \psi(x, y), \tag{2.4}$$

які є некоректними за третьою умовою Адамара [9]. Систему (2.4) подамо у вигляді, зручному для наближеного обчислення інтегралів. Для цього треба знайти похідні по нормалі, подати їх у вигляді, зручному для застосування відомих формул аналітичної геометрії [6] для знаходження тригонометричних функцій кутів:

$$\int_\Gamma r^2 \ln r \mu_1(s)\, d\Gamma + \int_\Gamma -r(2\ln r + 1)\cos(r, \nu)\mu_2(s)\, d\Gamma(s) = \varphi(x, y),$$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma r(2\ln r + 1)\cos(r, n)\mu_1(s)\, d\Gamma + \int_\Gamma [(2\ln r + 3)\cos(r, \nu)\cos(r, n) + \\ + k_1 k_2 (2\ln r + 1)\sin(r, n)\sin(r, \nu)]\mu_2(s)\, d\Gamma(s) = \psi(x, y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

де $k_1 = \operatorname{sign}(\mathit{\Pi p}_{oz}[n \times r])$, $k_2 = \operatorname{sign}(\mathit{\Pi p}_{oz}[\nu \times r])$. Наявність в ядрах системи рівнянь (2.5) логарифмічних особливостей дозволяє домогтися регуляризуючого ефекту їх розв'язку прямими обчислювальними методами, що підтверджено досвідом розв'язування інтегральних рівнянь подібного типу [5]. Їх суть полягає в тому, що систему інтегральних рівнянь (2.5) за допомогою формули Симпсона зводимо до системи алгебраїчних. Для цього контур Γ розбиваємо на n елементарних дуг, на кожній з яких обираємо проміжну точку. Систему інтегральних рівнянь наближено, заміною інтегралів по елементарних дугах, подаємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} I_{1i}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^{n} I'_{1i}\mu_{2i} = \varphi_1,$$

$$
\begin{gathered}
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{n} I_{ni}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^{n} I'_{ni}\mu_{2i} = \varphi_n, \\
\sum_{i=1}^{n} I''_{1i}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^{n} I'''_{1i}\mu_{2i} = \psi_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{n} I''_{ni}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^{n} I'''_{ni}\mu_{2i} = \psi_n,
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

де μ_1, μ_2 — невідомі значення функції щільності, φ_i і ψ_i — відомі значення функцій φ і ψ на i-й частині контуру, I_{ij}, I'_{ij}, I''_{ij}, I'''_{ij} — коефіцієнти системи лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислені за формулою Симпсона. В результаті розв'язку системи (2.6) визначаємо μ_1 і μ_2 на ділянках контуру. Після цього можна підрахувати значення функції $w(x,y)$ в будь-якій внутрішній точці області. Приклади чисельної реалізації методу потенціалу свідчать про його високу обчислювальну ефективність (точність у модельних задачах становить понад 99 %). Для перевірки чисельних результатів розглядаємо різні бігармонічні в області Ω функції $f(x,y)$, тобто $\Delta\Delta f(x,y) = 0$. Такі функції далі називаються модельними. Вони наведені в другій колонці таблиці 2. Потім формулюємо граничну задачу:

$$
w|_\Gamma = f, \quad \left.\frac{dw}{dn}\right|_\Gamma = \left.\frac{df}{dn}\right|_\Gamma .
$$

В силу єдиності розв'язку останньої, знайдена функція *w(x,y)* у внутрішніх точках області повинна тотожно збігатися з модельною функцією. В таблиці 1, наведено результати обчислювального експерименту, які свідчать про явище саморегуляризації в системі інтегральних рівнянь (2.4).

Форма контуру	*f(x,y)*	*(x,y)*$\in\Omega$	Точн. розв.	Набл. розв.
Коло радіуса R=6	$x^2/2+y^2/2$	(0,1)	0.500000	0.497914
Коло радіуса R=8	3	(3,0)	3.00000	3.00007
Еліпс a=10, b=8	$x^2/2+y^2/2$	(0,5)	12.5000	12.5009
Еліпс a=3, b=15	5	(0,4)	5.00000	4.99949
Еліпс a=7, b=5	x+y	(3,4)	7.00000	7.00142

Таблиця 1.

3. Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння. Фізичний приклад

Розглянемо рівняння Софі Жермен, тобто рівняння згину серединних точок тонкої пружної пластини

$$\Delta\Delta w(x,y) = \frac{q}{D}, \tag{3.1}$$

$$w|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{dw}{dn}\right|_\Gamma = 0, \tag{3.2}$$

де $w = w(x,y)$ — невідома функція згину серединної точки *(x,y)* пластини (призматичне тіло, товщина якого мала порівняно з іншими геометричними параметрами), Γ — контур пластини, який обмежує її область Ω, $q = const$ — інтенсивність поперечного навантаження; $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ — циліндрична жорсткість пластини, h — товщина пластини, E — модуль пружності першого роду, σ — коефіцієнт Пуассона її матеріалу. Крайові умови (3.2) фізично відповідають випадку, коли пластина в граничних точках жорстко закріплена. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що розв'язком рівняння (3.1) буде

$$w_1(x,y) = \frac{q(x^2+y^2)^2}{D}. \tag{3.3}$$

Тоді

$$\Delta\Delta w_1(x,y) = \frac{q}{D}. \tag{3.4}$$

Далі розв'яжемо однорідну задачу з неоднорідними крайовими умовами

$$\Delta\Delta w_2(x,y) = 0, \tag{3.5}$$

$$w_2|_\Gamma = -w_1(x,y), \left.\frac{dw_2}{dn}\right|_\Gamma = -\frac{\partial w_1(x,y)}{\partial n}. \tag{3.6}$$

Тобто при формуванні крайових умов (3.6) ми фактично обчислюємо на контурі Γ відому функцію $w_1(x,y)$ та її нормальну похідну. Алгоритм розв'язку задачі (3.5)–(3.6) є таким самим, як і для задачі (2.1)–(2.2). Знайшовши функції щільності μ_1, μ_2, маємо розв'язок задачі (3.1)–(3.2):

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y),$$

$$w(x,y) = \frac{q(x^2+y^2)^2}{D} + \int_\Gamma (r^2 \ln r)\mu_1(\xi,\eta)\,d\Gamma(\xi,\eta) + \\ + \int_\Gamma -r(2\ln r+1)\mu_2(\xi,\eta)\,d\Gamma(\xi,\eta),$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$, а (x,y)— внутрішня точка області Ω. Наведемо конкретні приклади розрахунку напружено-деформованого стану пластин, які будемо обчислювати за такими параметрами: $h = 0,07$ м, $q = 3$ кн/м^2,

$\sigma = 0.3$, $E = 21.5\,10^{10}$ Нм^2. Зауважимо, що в прикладах 1, 2 і 3 розглядаються пластини канонічної форми і результати (значення функції $w(x, y)$) збігаються з відомими [10], а в прикладах 4 і 5 проведено розрахунок напружено-деформованого стану пластин, для яких точне значення функції згину серединних точок $w(x, y)$ не відоме.

Приклад 1. Для еліпса (зокрема, круга) отримані результати можна порівняти з відомими, обчисленими аналітично. В таблиці 2 наведено такі порівняння для пластини, яка має форму круга радіуса 5. Дані таблиці свідчать про високу точність методу.

Коорд. точок пласт.	Отрим. розв.	Точний розв.	Похибка
(5,0)	0.00000	0.00000	-.131861E-08
(4,0)	0.331926E-06	0.332885E-06	0.958352E-09
(2,0)	0.181387E-05	0.181237E-05	-.150112E-08
(0,0)	0.257184E-05	0.256856E-05	-.328873E-08
(-1,0)	0.236998E-05	0.236718E-05	-.279783E-08
(-3,0)	0.105203E-05	0.105208E-05	0.518412E-10
(-4,0)	0.331929E-06	0.332885E-06	0.956305E-09
(-5,0)	0.00000	0.00000	-.748359E-09

Таблиця 2.

Приклад 2. Пластина має форму еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a = 5$ м, $b = 4$ м (див. рис. 1).

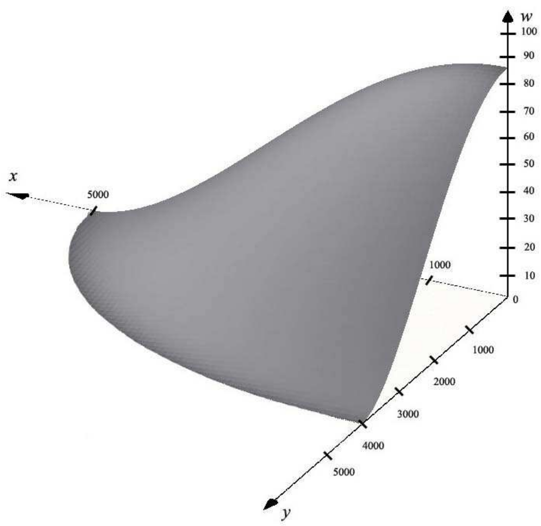

Рис. 1.

Приклад 3. Пластина має форму квадрата зі стороною 4 (див. рис. 2).

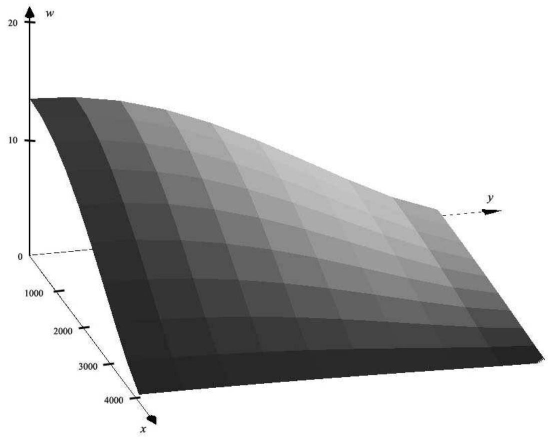

Рис. 2.

Приклад 4. Пластина має форму гіпоциклоїди

$$x = (R - r)\cos\varphi + d\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right),$$

$$y = (R - r)\sin\varphi + d\sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right)$$

з параметрами $R = 7$ м, $r = 1.2$ м, $d = 0.6$ м (див. рис. 3).

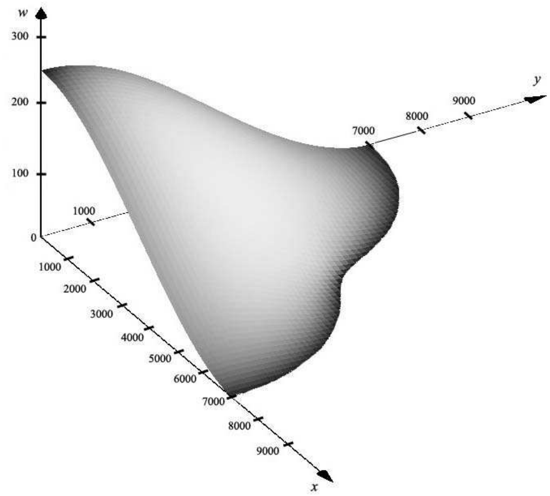

Рис. 3.

Приклад 5. Пластина має форму овала Кассіні

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi},$$

де $a = 6$ м, $c = 5.5$ м (див. рис. 4).

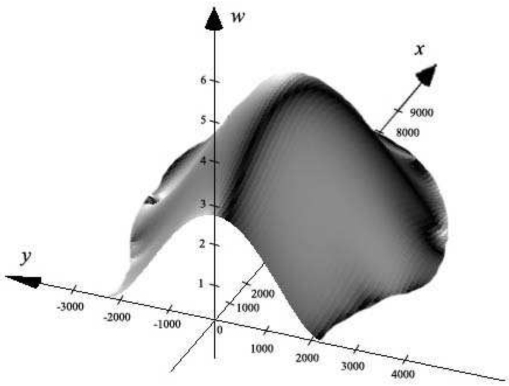

Рис. 4.

Ці приклади підтверджують високу обчислювальну ефективність і достатню для практики точність та зручність у застосуванні методу потенціалів. Розглянемо далі більш складну задачу.

4. Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами

$$\Delta\Delta w(x,y) = f \tag{4.1}$$

$$w|_\Gamma = \varphi,\ \frac{dw}{dn}\bigg|_\Gamma = \psi, \tag{4.2}$$

де $w = w(x, y)$ — невідома функція, f, φ, ψ — задані неперервні функції, Γ— контур, який обмежує область Ω [2]. За теоремою Гільберта [1] розв'язок рівняння (4.1) має вигляд:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_\Omega r^2 \ln r f(\xi, \eta)\, d\Omega(\xi, \eta), \tag{4.3}$$

де $w_1(x, y)$, знайдена через подвійний інтеграл, задовольняє рівняння (4.1), але не задовольняє граничним умовам (4.2). Отже,

$$\Delta\Delta w_1 = f. \tag{4.4}$$

Для того, щоб задовольнити граничним умовам, формулюємо таку задачу:

$$\Delta\Delta w_2 = 0, \tag{4.5}$$

$$w|_\Gamma = (\varphi - w)|_\Gamma, \quad \left.\frac{dw}{dn}\right|_\Gamma = \left.\left(\psi - \frac{\partial w_1}{\partial n}\right)\right|_\Gamma, \tag{4.6}$$

де при формуванні крайових умов (4.6) треба знайти різницю значень функцій φ, ψ, $w_1(x,y)$ та її нормальної похідної на границі Γ відповідно. Для знаходження функції $w_1(x,y)$ та її нормальної похідної треба обчислити відповідні подвійні інтеграли по області прямокутної форми, що охоплює контур Γ. Цю область покриваємо прямокутною сіткою. Далі задача (4.5)–(4.6) аналогічна задачі (2.1)–(2.2), детально викладеній в параграфі 2. Як і в параграфі 3, розв'язком задачі (4.1)–(4.2) буде

$$w = w_1 + w_2,$$

$$w(x,y) = \frac{1}{8\pi D}\iint_\Omega r^2 \ln r f(\xi,\eta)\, d\Omega(\xi,\eta) +$$

$$+ \int_\Gamma (r^2 \ln r)\mu_1(\xi,\eta)\, d\Gamma(\xi,\eta) + \int_\Gamma -r(2\ln r + 1)\mu_2(\xi,\eta)\, d\Gamma(\xi,\eta),$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$, а *(x,y)* — внутрішня точка області Ω.

5. Висновок

Аналіз одержаних даних свідчить про обчислювальну ефективність алгоритму розв'язку задачі. При його реалізації використовувались різні модельні функції і досить складні форми областей. При цьому точність результатів у розглянутих модельних задачах становить понад 99 %, що підтверджує об'єктивність досліджень і даних обчислювального експерименту. Результати можуть бути базою для постановки і розв'язування складних задач оптимізації, крайових задач рівнянь математичної фізики в нелінійній постановці з побудовою різних схем ітераційних процесів та дослідження їх збіжності.

Бібліографічні посилання

1. *Арсенін В. Я.* Методи математичної фізики і спеціальні функції / В. Я. Арсенін. М. : Наука, 1984.
2. *Боборикін В. Г.* Про розв'язування задачі пружного згину пластини зі змішаними граничними умовами / В. Г. Боборикін// International applied mechanics, 2006. Т. 42, № 5. С. 104–111.
3. *Волошко Л. В.* Обчислювальна ефективність бігармонічного потенціалу/ Л. В. Волошко, Л. С. Коряшкіна// Тези доп. VII міжнар. наук.-практ. конф. "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2009)". — Дніпропетровськ, Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, 25–27 листопада 2009 року. С.132–133.

4. *Волошко Л. В.* Розв'язок граничної задачі для бігармонічного рівняння у випадку складної форми області/ Л. В. Волошко, В. Д. Ламзюк, В. Л. Волошко// Тези доповідей 9-ї міжнар. міждисцип. наук.-практ. школи-конф. "Сучасні проблеми гуманізації і гармонізації керування". — Харків, Нац. ун-т ім. В. М. Каразіна, 1–8 листопада 2009 року. С. 269–271.
5. *Дмитрієв В. І.* Чисельні методи в програмуванні/ В. І. Дмитрієв, Є. В. Захаров// 1968. Вип. 10, С. 49–51.
6. *Ільїн І. О.* Аналітична геометрія / І. О. Ільїн, Е. Г. Позняк. М. : Физматлит, 2004.— 224 с.
7. *Кисельова О. М., Шор Н. З.* Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, додатки / О. М. Кисельова, Н. З. Шор. К. : Наукова думка, 2005.— 564 с.
8. *Коряшкіна Л. С.* Розв'язок однієї задачі керування параболічною системою / Л. С. Коряшкіна// Проблеми керування і інформатики, 1998. С. 94–102.
9. *Кузьменко В. І.* Конспект лекцій з курсу "Некоректні задачі"/ В. І. Кузьменко. Д.: РВВ ДНУ, 2009, 76 с.
10. *Самуль В. І.* Основи теорії пружності і пластичності / В. І. Самуль. М. : Вища школа, 1970.— 287 с.
11. *Melnikov Yu. A.* Influence Functions and Matrices / Yu. A. Melnikov. New York-Basel : Marcel Dekker, 1999.

Надійшла до редколегії 27.12.2010