ISSN 2312–4547. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2014. Вип. 6, № 8. С. 88–98

УДК 531.32:521.1

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ АСТРОДИНАМИКИ

Ю. Л. Меньшиков, Н. В. Поляков

Механико-математический факультет, Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, 49010, проспект Гагарина 72.
E-mail: Menshikov2003@list.ru

Рассмотрена задача определения положения неизвестной гравитационной массы по результатам обработки возмущений в движении наблюдаемых небесных тел, вызванных этой массой. Впервые подобная задача была рассмотрена Ж. Леверье и Д. Адамсом в 1843-1845 гг. В данной работе для получения приближенного решения использован иной подход, который обеспечивает устойчивость результатов и большую универсальность.

Ключевые слова: астродинамика, обратная задача, оценка решения, регуляризация.

1. Введение

В первой половине XIX века знаменитые математики и астрономы Карл Гаусс (1777–1855), Урбен Жан Леверье (1811–1877) и Джон Коуч Адамс (1819–1892) разработали новые, более совершенные математические методы решения задач небесной механики, в духе лучших традиций корифеев-предшественников. Это позволило поставить и решить строгими математическими методами фундаментальную проблему, касающуюся расширения наших знаний о Солнечной системе. Было доказано, что Солнечная система имеет в своем составе небесное тело (по меньшей мере одно), до тех пор никем не наблюдаемое. На самом деле был доказан не только сам факт существования ранее неизвестной планеты, но и была определена ее орбита с точностью, необходимой для ее обнаружения и наблюдения. Поистине Леверье и Адамс открыли Нептун "на кончике пера". Адамс на протяжении многих лет занимался вопросами численного интегрирования дифференциальных уравнений, и им разработан один из наиболее удобных методов численного интегрирования. Этот метод назван "методом Адамса"и применяется в настоящее время очень часто на ЭВМ. С математической точки зрения задачу, которую успешно решили Д. Адамс и У. Леверье, следует отнести к обратным задачам математической физики, т.е. к некорректным задачам. Метод решения этой задачи основан на методе наименьших квадратов. Вопрос о существовании еще одной планеты Солнечной системы возник в конце XIX - начале XX века. Дело в том, что Леверье после открытия Нептуна приступил к уточнению теории движения Урана с учетом Нептуна, а также к построению теории движения Нептуна. Закончив исследования в 1874 году (Уран) и 1875 году (Нептун), Леверье сумел добиться большой точности, но все же полного согласия теории и наблюдений как для Урана, так и для Нептуна не было. Это наводило на мысль, что они есть результаты не каких-либо ошибок в теории движения или случайных ошибок наблюдений, а реального несоответствия теории и фактического движения Урана и Нептуна. Триумф теоретических достижений, который продемонстрировали Д. Адамс и У. Леверье, привлек к новым исследованиям сотни и тысячи энтузиастов и профессионалов астрономов, математиков. Было опубликовано сотни научных расчетов (методами Д. Адамса и У. Леверье), однако результаты ничего не дали. Были работы, в которых одновременно "открывались"до двух десятков новых небесных тел. Гораздо позднее было обнаружено специфическое свойство обратных задач — их неустойчивость. Это свойство и не позволило успешно продвигать методы Д. Адамса и У. Леверье в поисках новых небесных тел. Конечно, наши знания о Солнечной системе не были и никогда не будут окончательными и их уровень целиком определяется уровнем теоретических и наблюдательных исследований. Вместе с тем теоретический анализ построенных теорий движения больших (и прежде всего, внешних) планет указывает на тот факт, что существуют пока необъяснимые расхождения между теорией и наблюдениями, несмотря на то, что параметры теорий движения уточнялись с учетом всех наблюдений, сделанных на протяжении большого промежутка времени, вплоть до наших дней. Например, существуют широтные отклонения в движении Урана и Нептуна и отклонения в движении перигелия кометы Галлея, которые не могут быть объяснены действием сил гравитации известных тел Солнечной системы. Эти обстоятельства привели к тому, что в 60-х годах нашего столетня появилась гипотеза о существовании десятой, заплутоновой планеты с массой, примерно равной массе Юпитера, удаленной от Солнца на расстояние 60 а. е., орбита которой имеет наклон $i = 120°$. Совместное решение уравнений движения известных планет и десятой гипотетической планеты и последующий тщательный просмотр фотопластинок, на которых была сфотографирована "подозрительная"часть неба, не дали положительных результатов. Хотя, по предварительным расчетам, гипотетическая планета должна была иметь 13–14-ю звездную величину, а на фотопластинках рассматривались объекты до $16,5$ звездной величины, но десятую планету обнаружить не удалось.

Таким образом, разработка более точных устойчивых методов решения обратной задачи астродинамики остается актуальной.

2. Постановка обратной задачи астродинамики

Рассматривается n взаимодействующих масс, движущихся под действием сил взаимного притяжения в некоторой инерциальной системе координат. Массам m_i присваивается индекс $i (i = 1, 2, 2, .., n), \vec{r}_{ik}$, обозначаются вектора, соединяющие массу m_i и массу с номером m_k. Согласно закону Ньютона на массу m_j действует результирующая сила $\vec{F}_j$, равная [1]

$$\vec{F}_j = G \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \vec{r}_{ij}, \tag{2.1}$$

где G есть гравитационная постоянная.

Под действием этой силы масса m_j совершает движение, которое подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \vec{r}_{0j}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m_j} \vec{F}_j, \tag{2.2}$$

где $\vec{r}_{0j}$ есть радиус-вектор, соединяющий начало инерционной системы координат с массой m_j.

В соотношении (2.2) перейдем от переменных $\vec{r}_{ij}, j = 1, 2, 3, ., n$ к переменным $\vec{r}_{0j}, j = 1, 2, 3, ., n$:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{0j}(t)}{G dt^2} = \frac{1}{G m_j} \vec{F}_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{m_i}{|\vec{r}_{oi} - \vec{r}_{oj}|^3} (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j}). \tag{2.3}$$

Предположим, что среди n гравитационных масс местоположение только массы m_n неизвестно. Тогда в (2.3) неопределенным будет последнее слагаемое в сумме справа.

Уравнение (2.3) преобразуем к виду

$$\frac{d^2 \vec{r}_{0j}(t)}{G dt^2} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r}_{oi} - \vec{r}_{oj}|^3} (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j}) - \bar{f}_j(t), j \neq n, \tag{2.4}$$

где

$$\bar{f}_j(t) = \frac{m_n}{|\vec{r}_{on} - \vec{r}_{oj}|^3} (\vec{r}_{0n} - \vec{r}_{0j})$$

есть искомая функция.

В проекциях на оси инерционной системы координат уравнение (2.4)запишем в виде

$$\frac{d^2 x_{0j}(t)}{G dt^2} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r}_{oi} - \vec{r}_{oj}|^3} (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})_x - \vec{f}_{jx}(t), j \neq n, \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2 y_{0j}(t)}{G dt^2} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r}_{oi} - \vec{r}_{oj}|^3} (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})_y - \vec{f}_{jy}(t), j \neq n, \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2 z_{0j}(t)}{G dt^2} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r}_{oi} - \vec{r}_{oj}|^3} (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})_z - \vec{f}_{jz}(t), j \neq n, \tag{2.7}$$

где $\vec{r}_{0j} = \vec{i}x_{0j}+\vec{j}y_{0j}+\vec{k}z_{0j}$; $\vec{f}_{jx}, \vec{f}_{jy}, \vec{f}_{jz}$ - проекции вектора of $\vec{f}_j$ на соответствующие оси инерциальной системы координат,$(\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})_x, (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})_y, (\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})_z$ - аналогичные проекции вектора $(\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j})$.

Проинтегрируем уравнения (2.5) - (2.7) дважды от t_0 до t:

$$\frac{x_{0j}(t)}{G} = \int_{t_0}^{t} \mu_1(\tau)(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} f_{jx}(\tau)(t-\tau)d\tau + \frac{\dot{x}_{0j}(t_0)}{G} + \frac{x_{0j}(t_0)}{G},$$

$$\frac{y_{0j}(t)}{G} = \int_{t_0}^{t} \mu_2(\tau)(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} f_{jy}(\tau)(t-\tau)d\tau + \frac{\dot{y}_{0j}(t_0)}{G} + \frac{y_{0j}(t_0)}{G}, \qquad (2.8)$$

$$\frac{z_{0j}(t)}{G} = \int_{t_0}^{t} \mu_3(\tau)(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} f_{jz}(\tau)(t-\tau)d\tau + \frac{\dot{z}_{0j}(t_0)}{G} + \frac{z_{0j}(t_0)}{G},$$

где

$$\mu_1(t) = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r_{oi}} - \vec{r_{oj}}|^3}(\vec{r_{0i}} - \vec{r_{0j}})_x, \quad \mu_2(t) = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r_{oi}} - \vec{r_{oj}}|^3}(\vec{r_{0i}} - \vec{r_{0j}})_y,$$

$$\mu_3(t) = \sum_{i=1, i\neq j}^{n-1} \frac{m_i}{|\vec{r_{oi}} - \vec{r_{oj}}|^3}(\vec{r_{0i}} - \vec{r_{0j}})_z.$$

Представим каждое уравнение системы (2.8) в виде

$$\int_{t_0}^{t} (t-\tau) f_{jk}(\tau) d\tau = u_{jk}(t), k = 1, 2, 3, \qquad (2.9)$$

где

$$u_{j1}(t) = \frac{x_{0j}(t)}{G} - \int_{t_0}^{t} \mu_1(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{\dot{x}_{0j}(t_0)}{G} - \frac{x_{0j}(t_0)}{G},$$

$$u_{j2}(t) = \frac{y_{0j}(t)}{G} - \int_{t_0}^{t} \mu_2(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{\dot{y}_{0j}(t_0)}{G} - \frac{y_{0j}(t_0)}{G},$$

$$u_{j3}(t) = \frac{z_{0j}(t)}{G} - \int_{t_0}^{t} \mu_3(\tau)(t-\tau)d\tau - \frac{\dot{z}_{0j}(t_0)}{G} - \frac{z_{0j}(t_0)}{G}.$$

Уравнения (2.9) являются интегральными уравнениями Вольтерра первого рода относительно искомых функций $f_{jk}(t), k = 1, 2, 3$ [2].

Найдя решения уравнений (2.9) $f_{jk}(t), k = 1, 2, 3$, можно восстановить вектор-силу $\vec{f_j}(t)$, действующую со стороны массы m_n на массу m_j с точностью до постоянного множителя.

Выполняя аналогичные вычисления и разрешая уравнения типа (2.9) для массы с номером m_l, определим (с точностью до постоянного множителя) силу $\vec{f_l}(t)$, действующую на массу m_l со стороны массы m_n. Пересечение линий действия векторов $\vec{f_j}(t)$ и $\vec{f_l}(t)$ определяет положение массы m_n в пространстве (в выбранной инерциальной системе).

Как нетрудно видеть, $u_{jk}(t)$ определяются функциями $\vec{r}_{0l}(t)$, $i = 1, ..., n-1$, которые предполагаются известными из астрономических наблюдений за движением масс $m_j(t), j = 1, 2, , ..(n-1)$ с некоторой погрешностью.

Правые части в (2.9) являются непрерывными функциями, то есть принадлежат нормированному пространству $C[t_0, T]$, где $[t_0, T]$ есть отрезок времени, на котором исследуется движение массы m_n.

Решения уравнения (2.9) по физическому смыслу также должны принадлежать $C[t_0, T]$, то есть $f_{jk}(t) \in C[t_0, T]$. В этих условиях решение уравнений (2.9) является некорректной задачей [2].

В уравнениях движения (2.5)-(2.7) коэффициенты m_i $(i = 1, 2, ..., (n-1))$, G определены из астрономических наблюдений и экспериментальных исследований, и поэтому их значения приближенны. Положем, что каждый коэффициент в уравнениях (2.5)-(2.7) может принимать значения из некоторого интервала:

$$0 < m_i^0 \leq m_i \leq m_i^{up}, i = \overline{1, (n-1)}, i \neq j, 0 < G^0 \leq G \leq G^{up}. \tag{2.10}$$

Введем обозначения $\vec{p} = (b_1, \ldots, b_{n-1})^*$, $\vec{R}(t) = (r_{01}(t), \ldots, r_{0(n-1)}(t),)^*$, где $b_1 = m_1, \ldots, b_{j-1} = m_{j-1}, b_j = m_{j+1}, \ldots, b_{n-2} = m_{n-1}, b_{n-1} = \frac{1}{G}$; $(.)^*$ есть знак транспонирования.

Неравенства (2.10) определяют замкнутую область $\bar{D}$ в $(n-1)$ - мерном евклидовом пространстве R^{n-1}. Множество вектор-функций $\vec{R}(t)$ образуют линейное функциональное пространство $C_n[t_0, T]$, в котором можно ввести норму следующим образом [3]:

$$\| \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \|_{C_n[t_0,T]} = \max_{1 \leq i \leq n} | r_{1,i} - r_{2,i} |,$$

где

$$r_i^k = \| r_i^k \|_{C[t_0,T]} = \max_{t \in C[t_0,T]} | r_{oi}^k(t) |, \vec{R}_k(t) = (r_{o1}^k, r_{o2}^k, .., r_{on}^k)^*, k = 1, 2.$$

Представим уравнение (2.9) в виде

$$\tilde{A} f = u = B_p \vec{R}, \tag{2.11}$$

где оператор $\tilde{A}$ является вполне непрерывным, B_p есть линейный ограниченный оператор, переводящий элементы пространства $C_n[t_0, T]$ в $C[t_0, T]$.

В оператор $\tilde{A}$ в (2.11) не входят параметры математической модели движения n тел. Нетрудно видеть, что оператор $\tilde{A}$ в (2.11) является в этих условиях вполне непрерывным, взаимнооднозначным оператором [3]. Значения оператора B_p зависят от конкретной величины параметров математической модели процесса, то есть от p.

Обозначим через $A_T, B_T, \vec{R}_T(t), u^T$ соответственно точные операторы в (2.11), точную вектор-функцию $\vec{R}(t)$ и точную функцию u в правой части уравнения (2.11).

Пусть вместо $\vec{R}_T(t)$ в (2.11) задана приближенная функция

$$\vec{R}_\delta(t) = (\tilde{r}_{o1}(t), \tilde{r}_{o2}(t), ..., \tilde{r}_{on}(t))^*,$$

для которой справедливо неравенство

$$\| \vec{R}_T(t) - \vec{R}_\delta(t) \|_{C_n[t_0,T]} \leq \delta.$$

Этим данным $\vec{R}_\delta(t)$ будет соответствовать приближенное значение $\tilde{u}$ правой части уравнения (2.11) ($\tilde{u} = B_p\vec{R}_\delta$).

Оценим отклонение $\tilde{u}(t)$ от $u_T(t)$, полагая, что точный оператор B_T является линейным:

$$\| \tilde{u}(t) - u_T(t) \|_{C[t_0,T]} = \| B_p\vec{R}_\delta - B_{ex}\vec{R}_T \|_{C[t_0,T]} \leq b_0\delta + d_1 \| \vec{R}_\delta \| = \delta_0, \quad (2.12)$$

где

$$b_0 = \sup_{\vec{p}\in\bar{D}} \| \vec{R}_p \|; d_1 \geq \sup_{\vec{p}\in\bar{D}} \| B_{\vec{p}} - B_T \| .$$

Так как реальные процессы можно описать математическими методами только приближенно, то предположим, что точный оператор A_T в уравнении (2.11) отличается от приближенного оператора $\tilde{A}$ (если точный оператор является линейным) на заданную величину

$$h \geq \| \tilde{A} - A_T \|_{Z\to U} .$$

В этом случае можно использовать алгоритм решения обратной задачи с приближенным оператором $\tilde{A}$, предложенный в работе [4].

Однако предположение о линейности точного оператора A_T, как и информация относительно величины h, в большинстве случаев не соответствует действительности.

Тогда множество возможных решений Q_{δ_0} уравнения (2.11) с учетом погрешности операторов $\tilde{A}, B_{\vec{p}}$ будет иметь вид:

$$Q_{\delta_0,d_1} = \{f : \| \tilde{A}f - B_{\vec{p}}\vec{R}_\delta \|_{C[t_0,T]} \leq \delta_0 + h\|f\|\}. \quad (2.13)$$

Для решения некорректной задачи (2.11) в работе использован метод регуляризации А.Н.Тихонова со стабилизирующим функционалом

$$\Omega[f] = \|f\|^2_{W_2^1[t_0,T]} = \int_{t_0}^{T} [q_0 f^2 + q_1 \dot{f}^2] d\tau, \quad (2.14)$$

где $q_0 \geq 0, q_1 > 0$, q_0, q_1 - постоянные.

Таким образом, задача нахождения приближенного решения уравнения (2.11) сводится к решению экстремальной задачи:

$$\Omega[\tilde{f}] = \inf_{f\in Q_{\delta_0,d_1}} \Omega[f]. \quad (2.15)$$

Следует отметить, что не существует методов для определения погрешности d_1, поскольку точный оператор B_T неизвестен. Более того, точные операторы A_T, B_T не могут быть построены и в принципе, так как математические методы лишь приближенно описывают реальные процессы. Конечно, при определенных предположениях относительно точных операторов A_T, B_T возможно получить некоторые оценки погрешности d_1, h, однако такие оценки будут нереальными.

Следовательно, приближенные решения обратных задач измерения не представляют интереса для практического использования в силу неустойчивости решений.

Выход из этой тупиковой ситуации существует, если при исследовании обратной задачи измерения ограничиться только некоторой оценкой точного решения.

3. Основная гипотеза и результаты

Для получения полезной информации о точном решении обратной задачи примем следующую гипотезу: для точного решения обратной задачи f_T выполняется неравенство для любых приближенных операторов $\tilde{A}, B_p$ в уравнении обратной задачи (2.11), которые адекватно описывают изучаемый физический процесс

$$\Omega[\tilde{f}] \leq \Omega[f_{ex}], A_{ex} f_{ex} = B_{ex} \vec{R}_{ex}, \tag{3.1}$$

где f_{ex} есть точное решение обратной задачи измерения при полностью точных исходных данных (2.11), $\tilde{f}$ есть регуляризованное решение обратной задачи (2.11) с операторами $\tilde{A}, B_p$ и стабилизирующим функционалом $\Omega[\tilde{f}]$. Если точные операторы A_T, B_T являются линейными, тогда выполнение неравенства (3.1) очевидно.

Если $\tilde{f} \neq 0$ тогда можно утверждать, что существует реальное небесное тело m_n. Очевидно, что функция $\tilde{f}$ может значительно отличаться от точного решения f_{ex}.

Если $\tilde{f} \equiv 0$, также возможно существование реального небесного тела m_n, так как не рассмотрены все операторы $B_{\vec{p}}, p \in \bar{D}$.

Множество возможных решений $Q_{\vec{p},\delta_0}$ уравнения (2.11) при фиксированных операторах $\tilde{A}, B_p$ будет иметь вид

$$Q_{\vec{p},\delta} = \{f : \| \tilde{A} f - B_{\vec{p}} \vec{R}_{\delta} \|_{C[t_0,T]} \leq \| B_{\vec{p}} \| \delta\}. \tag{3.2}$$

Оценка точного решения f_{ex}, полученного методом регуляризации на множестве $Q_{p,\delta}$, при фиксированных операторах $\tilde{A}, B_p$ является некоторой функцией вектора $\vec{p} \in \bar{D}$, т.е. $f_{\alpha,p}$. Чтобы изучить влияние параметров математической модели $\vec{p} \in \bar{D}$ задачи, необходимо исследовать все возможные оценки $f_{\alpha,p}$.

Рассмотрим решение экстремальной задачи (2.15) на множестве $Q_{\vec{p},\delta}$ с выбором параметра регуляризации α из условия

$$\| \tilde{A} f - \tilde{u} \|_U = \| B_{\vec{p}} \| \delta. \tag{3.3}$$

Согласно основной гипотезы будем иметь оценку снизу:

$$\Omega[f_{\alpha,p}] \leq \Omega[f_{ex}], A_{ex} f_{ex} = B_{ex} \vec{R}_{ex}.$$

Полученная оценка позволяет сделать заключение о существовании неизвестной планеты с гарантией (случай $f_{\alpha,p} \neq 0$) или ее отсутствии, но без гарантии (случай $f_{\alpha,p} \equiv 0$).

Отметим, что при получении оценки не использовались свойства точных операторов A_T, B_T. Кроме того, для существования оценки точного решения можно ослабить требования к стабилизирующему функционалу $\Omega[f]$.

Приведем достаточные условия существования элемента $f_{\alpha,p}$.

Теорема 3.1. Пусть $\Omega[f]$ есть стабилизирующий функционал для пространств $Z = C[t_0, T], R = C_n[t_0, T], Z_1 = W_2^1[t_0, T]$, функционал $\Omega[f]$ непрерывный, неотрицательный и выпуклый на Z_1, функции $f \in Z_1$, для которых выполняется неравенство $\Omega[f] \leq C$ (C постоянная), образуют компактное множество в Z_1. Тогда решение экстремальной задачи (2.12) существует при любом $\delta > 0$.

В целях исследования влияния параметров математической модели процесса на оценку точного решения рассмотрим объединение множеств $Q_{p,\delta}$ по всем $\vec{p} \in \bar{D}$:

$$Q^{un} = \bigcup_{\vec{p} \in \bar{D}} Q_{\vec{p},\delta}. \tag{3.4}$$

Таким образом, множество Q^{un} является неограниченным как сумма неограниченных множеств.

Пусть f^{un} есть решение экстремальной задачи:

$$\Omega[\tilde{f}] = \inf_{f \in Q_{\delta_0} \bigcap Z_1} \Omega[f]. \tag{3.5}$$

Параметр регуляризации α можно определять по методу невязки:

$$\| \tilde{A} f^{un} - \tilde{u} \|_U = \delta_0. \tag{3.6}$$

Поскольку $Q^{un} \in Q_{\delta_0}$, то использование в качестве множества возможных решений уравнения (2.11) множества Q^{un} вместо Q_{δ_0} позволит получить более точные оценки точных решений. Кроме того, очевидно, что выполняется неравенство

$$\Omega[f_{ex}] \geq \Omega[f_{\alpha,p}] \geq \Omega[f^{un}]. \tag{3.7}$$

Оценка точного решения f^{un} позволяет сделать заключение о существовании неизвестной планеты с гарантией (случай $f^{un} \neq 0$) или ее отсутствии, но без гарантии (случай $f^{un} \equiv 0$).

Для изучения влияния параметров математической модели на оценки точного решения обратной задачи необходимо иметь возможность среди операторов B_p выделить некоторый оператор B_{p_0} такой, что если выполняется условие

$$\Omega[f_1] = \Omega[\tilde{A}^{-1} B_p \vec{R}], \Omega[f_2] = \Omega[\tilde{A}^{-1} B_{p_0} \vec{R}], \tag{3.8}$$

тогда справедливо неравенство

$$\Omega[f_1] = \|f_1\|_{W_2^1[t_0,T]} \geq \Omega[f_2] = \|f_2\|_{W_2^1[t_0,T]} \tag{3.9}$$

для любого возможного $\vec{R}$ и любого $\vec{p} \in \bar{D}$; $\tilde{A}^{-1}$ есть обратный оператор к $\tilde{A}$.

В дальнейшем оператор B_{p_0} в правой части уравнения (2.11) будем называть "специальным минимальным оператором"в смысле выполнения неравенства (3.9).

Если оператор B_{p_0} существует и определяется единственным образом, тогда задача нахождения точной нижней грани функционала $\Omega[f]$ на множестве Q^{un} будет иметь решение, совпадающее с решением следующей более простой задачи: найти элемент $f_0 \in Q_{p_0,\delta}$, для которого выполняется равенство

$$\Omega[f_0] = \inf_{f \in Q_{p_0,\delta} \bigcap Z_1} \Omega[f]. \tag{3.10}$$

Задача (3.10) имеет решение при любом $p_0 \in \bar{D}$ и δ, так как выполнены условия теоремы 1.

При этом выполняется следующее неравенство для любого $\vec{p} \in \bar{D}$:

$$\Omega[f_{ex}] \geq \Omega[f_{\alpha,p}] \geq \Omega[f_0]. \tag{3.11}$$

Оценка точного решения f_0 позволяет сделать заключение о существовании неизвестной планеты с гарантией (случай $f_0 \neq 0$) или ее отсутствии, но без гарантии (случай $f_0 \equiv 0$).

Теорема 3.2. Специальный минимальный оператор B_{p_0} в уравнении (2.11) существует, определяется единственным образом и соответствует вектору

$$p_0 = (m_1^0, m_2^0, ..., m_{j-1}^0, m_{j+1}^0, ..., m_{n-1}^0, 1/G^{up})^*.$$

Доказательство. Пусть $\vec{R}(t)$ есть некоторая реализация астрономических наблюдений. Рассмотрим задачу определения точной нижней грани функционала $\Omega[f] = \Omega[\tilde{A}^{-1}B_p\vec{R}]$ в области $\bar{D}$ при фиксированном $\vec{R}(t)$. По теореме Ве -йерштрасса точная нижняя грань непрерывного функционала $\Omega[f]$ достигается на некотором векторе $p_0 \in \bar{D}$.

При любом $p \in \bar{D}$ функция $\Omega[\tilde{A}^{-1}B_p\vec{R}]$ строго положительна, так как

$$\Omega[f] = \|f\|_{W_2^1[t_0,T]} > 0$$

при $f \neq 0, \forall p \in \bar{D}$.

Функция $\Omega[f]$ при фиксированном $\vec{R}(t)$ представима в виде квадратичной формы $\Omega[f] = (Cp, p) = \Omega[p]$, где C есть вещественная симметричная матрица $C = (c_{ik})_{k,i=1}^n$.

Коэффициенты матрицы C определяются выражением

$$c_{ik} = \int_{t_0}^T (q_0 a_{ij}(t) a_{kj}(t) + q_1 \frac{da_{ij}}{dt}\frac{da_{kj}}{dt}), i, k = 1, 2, ..(n-1).$$

Поскольку $\Omega[f] > 0$ для $p \in \bar{D}$, то выполняются неравенства Сильвестра:

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1,n-1} \\ . & . & . & . & . \\ c_{n-1,1} & . & . & . & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0.$$

Необходимым и достаточным условием сильной выпуклости функции $\Omega[\vec{p}]$ на $\bar{D}$ является следующее [5]:

$$\sum_{i,k=1}^{(n-1)} \frac{\partial^2 \Omega[p]}{\partial b_i \partial b_k} \xi_i \xi_k > 0, \tag{3.12}$$

для любого $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1})^* \in E^{n-1}$ и любого $\vec{p} \in \bar{D}$.

Квадратичная форма (3.12) является положительной, так как

$$\bar{C} = \left(\frac{\partial^2 \Omega[p]}{\partial b_i \partial b_k} \xi_i \xi_k \right)_{i,k=1}^{(n-1)} = (\bar{c}_{ik})_{i,k=1}^{(n-1)} = (2c_{ik})_{i,k=1}^{(n-1)}.$$

Следовательно, $\Omega[\vec{p}]$ является сильно выпуклой на $\bar{D}$.

Аналогично [5] доказывается, что $\Omega[\vec{p}]$ достигает точной нижней грани в единственной точке области

$$p_0 = (m_1^0, m_2^0, ..., m_{j-1}^0, m_{j+1}^0, ..., m_{n-1}^0, G^{up-1})^* \in \bar{D}$$

при любом $\vec{R}(t)$. Теорема доказана.

Предположим, что среди операторов B_p существует некоторый оператор B_{p^1} такой, что если выполняется условие

$$\Omega[f_1] = \Omega[\tilde{A}^{-1} B_p \vec{R}], \Omega[f_2] = \Omega[\tilde{A}^{-1} B_{p^1} \vec{R}], \tag{3.13}$$

тогда справедливо неравенство

$$\Omega[f_1] = \|f_1\|_{W_2^1[t_0,T]} \leq \Omega[f_2] = \|f_2\|_{W_2^1[t_0,T]} \tag{3.14}$$

для любого возможного $\vec{R}$ и любого $p \in \bar{D}$; $\tilde{A}^{-1}$ есть обратный оператор к $\tilde{A}$.

В дальнейшем оператор B_{p^1} в правой части уравнения (2.11) будем называть "специальным максимальным оператором" в смысле выполнения неравенства (3.14).

Если оператор B_{p^1} существует и определяется единственным образом, тогда можно рассмотреть решение следующей экстремальной задачи: найти элемент $f^1 \in Q_{p,\delta} \bigcap Z_1$, для которого выполняется равенство

$$\Omega[f^{un}] = \sup_{\vec{p} \in \bar{D}} \inf_{f \in Q_{p_0,\delta} \bigcap Z_1} \Omega[f]. \tag{3.15}$$

Задача (3.15) имеет решение при любом $p^1 \in \bar{D}$ и δ, так как выполнены условия теоремы 3.1.

При этом очевидно выполняется следующее неравенство:

$$\Omega[f_T] \geq \Omega[f_1] \geq \Omega[f_{\alpha,p}] \geq \Omega[f_0] \geq \Omega[f^{un}]. \tag{3.16}$$

Теорема 3.3. Специальный максимальный оператор B_{p^1} в уравнении (2.11) существует, определяется единственным образом и соответствует вектору

$$p^1 = (m_1^{up}, m_2^{up}, ..., m_{j-1}^{up}, m_{j+1}^{up}, ..., m_{n-1}^{up}, 1/G^0)^*.$$

Доказательство выполняется аналогично теореме 3.2.

Полученная оценка позволяет сделать заключение о существовании неизвестной планеты с гарантией (случай $f^1 \neq 0$) или ее отсутствии, но без гарантии (случай $f^1 \neq 0$). Во втором случае существование реального небесного тела возможно при уточнении структуры операторов B_{p^1}.

Возможны и иные варианты оценок точных решений.

4. Заключение

В работе предложен алгоритм нахождения координат неизвестной гравитационной массы по результатам астрономических наблюдений движения других гравитационных тел. В отличие от подобной задачи, рассмотреной впервые Ж. Леверье и Д. Адамсом, в работе предложен более универсальный устойчивый алгоритм. Для получения полезных оценок точного решения задачи введена гипотеза, которая позволяет исключить из расчетов величины погрешностей приближенных операторов задачи. Получены условия существования оценок решений. Рассмотрено несколько нестандартных постановок обратных задач.

Библиографические ссылки

1. *Красовский Н. Н.*Терия управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
2. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсение. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
3. *Треногин В. А.*Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.
4. *Гончарский А. В.* Регуляризирующий алгоритм для некорректных задач с приближенно заданным оператором / А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. Г. Ягола // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Т.12, №6. — С. 1592–1594.
5. *Васильев Ф. П.*Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1980. — 520 с.

Надійшла до редколегії 21.01.2014